

基于传播子技术的辛时域多分辨率方法

卫 敏, 吴先良, 黄志祥, 廖索引, 王 辉

(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽合肥 230039)

摘 要: 数值求解三维时域 Maxwell 方程的过程中, 保持方程的内在结构显得尤为重要. 利用 Hamilton 函数的变分形式, 将 Maxwell 方程表述为 Hamilton 正则方程形式. 在时域方向, 利用辛传播子技术对方程进行离散以保持方程的内在结构; 在空域方向, 采用时域多分辨率方法对三维旋度算符进行差分离散, 建立了求解 Maxwell 方程的辛时域多分辨率(S-MRTD)方法. 对 S-MRTD 方法的稳定性及数值色散性进行了系统的探讨, 数值结果表明该方法的正确性及高精度性.

关键词: 传播子技术; 辛时域多分辨率; 稳定性; 数值色散性

中图分类号: TN801 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 05-1034-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.05.028

The Scheme of Symplectic MRTD Using Propagation Technique

WEI Min, WU Xian-liang, HUANG Zhi-xiang, LIAO Su-yin, WANG Hui

(Key Lab of Intelligent Computing & Signal Processing, Anhui University, Ministry of Education, Hefei, Anhui 230039, China)

Abstract: It is especially important to preserve some characters of the original system while numerical simulating three-dimensional time domain Maxwell's Equations. The Maxwell's equations are written as normal Hamilton equations using functional variation method. We discretize Maxwell's equations in the time direction using symplectic propagation technique and then evaluate the equations in the spatial direction with high-order nature of spatial multi-resolution approximations to construct symplectic Multi-Resolution Time Domain (S-MRTD) scheme. The stability and numerical dispersion analysis are also included. Numerical results are given to show the high efficiency and accuracy of the S-MRTD scheme.

Key words: propagation technique; symplectic multi-resolution time domain; stability; numerical dispersion

1 引言

时域有限差分^[1](FDTD)法以其简单直观的特点已成为电磁学数值计算的一种常用方法,它直接求解依赖时间的 Maxwell 旋度方程,利用二阶精度的中心差分近似旋度方程中的时间及空间微分算符,极易处理非均匀媒质的情形.然而,它的计算精度相对较低,计算的时间步长与空间离散网格的大小必须满足 Courant-Friedrichs-Levy (CFL)稳定性条件,并且随着计算时间步的增加,误差将会累积.为克服 FDTD 方法的这些缺点,文献^[2]提出了 MRTD 方法来提高计算精度,但 MRTD 方法对稳定性条件的要求更强;Zhizhang Chen^[3]则提出 ADI-MRTD 来摆脱 CFL 稳定性条件的束缚,但 ADI-MRTD 方法的数值色散性较 FDTD 法差.总而言之,这些方法的效果并

不尽如人意,原因在于这些方法破坏了 Maxwell 方程的结构.由于 Maxwell 方程可以看成是一个无穷维的 Hamilton 系统,而 Hamilton 的算法应在辛几何框架内产生,该系统随时间的演化永远是辛变换演进,所以正确的离散算法应是辛变换,这样的算法称为 Hamilton 算法或辛算法^[4].

为了对 Maxwell 方程离散求解时,保持方程内在结构,我们将 Maxwell 方程改写为 Hamilton 方程形式.在时域利用辛传播子技术对方程进行离散;在空域采用时域多分辨率方法进行离散,构建了求解 Maxwell 方程的辛算法,即辛时域多分辨率(S-MRTD)方法.对 S-MRTD 方法的稳定性及数值色散性进行了系统的探讨,为 SMRTD 方法在电磁计算中的进一步应用奠定了理论基础.

2 S-MRTD 理论

2.1 Maxwell 方程的 Hamilton 表述

考虑媒质的参数不随时间变化且各向同性的时变场, 三维 Maxwell 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J} \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3)$$

其中, ϵ, μ 分别为媒质的介电常数与磁导率. 在 Hamilton 框架下, 方程可改写为一无穷维 Hamilton 正则方程

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta H(\mathbf{B}, \mathbf{D})}{\delta \mathbf{B}} \\ \frac{\delta H(\mathbf{B}, \mathbf{D})}{\delta \mathbf{D}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中, Hamilton 函数 $H(\mathbf{B}, \mathbf{D})$ 为

$$H(\mathbf{B}, \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} \cdot \nabla \times \mathbf{D} \right) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \quad (5)$$

变分导数 $\delta/\delta \mathbf{B}$ 的定义为

$$\frac{\delta H(\mathbf{B}, \mathbf{D})}{\delta \mathbf{B}} = \left(\frac{\delta H}{\delta B_x}, \frac{\delta H}{\delta B_y}, \frac{\delta H}{\delta B_z} \right)^T \quad (6)$$

而 $\frac{\delta H}{\delta B_\vartheta}$ ($\vartheta = x, y, z$) 的定义为

$$\left[\frac{d}{d\varrho} H(B_\vartheta + \varrho \varphi) \right]_{\varrho=0} = \int \frac{\delta H}{\delta B_\vartheta} \varphi dV \quad (7)$$

式中 φ 为检验函数.

2.2 S-MRTD 方法

经过复杂的数学推导, Hamilton 方程(4)等价于

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & -\epsilon^{-1} \mathbf{R} \\ \mu^{-1} \mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B) \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_A = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & -\epsilon^{-1} \mathbf{R} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mu^{-1} \mathbf{R} & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

2.2.1 空域的离散

由于算符 $\mathbf{L}_A, \mathbf{L}_B$ 中含有三维旋度算符 \mathbf{R} , 为了得到 Maxwell 方程的数值解, 必须在空域对方程进行进一步的离散. 在此, 我们基于时域多分辨率方法将电场与磁场用具有紧支撑的 Daubechies 小波尺度函数展开成如下形式:

$$E_x(r, t) = \sum_{i,j,k} \varphi_x E_{i+\frac{1}{2},j,k}(t) \varphi_{i+\frac{1}{2}}(x) \varphi_j(y) \varphi_k(z) \quad (11a)$$

$$E_y(r, t) = \sum_{i,j,k} \varphi_y E_{i,j+\frac{1}{2},k}(t) \varphi_i(x) \varphi_{j+\frac{1}{2}}(y) \varphi_k(z) \quad (11b)$$

$$E_z(r, t) = \sum_{i,j,k} \varphi_z E_{i,j,k+\frac{1}{2}}(t) \varphi_i(x) \varphi_j(y) \varphi_{k+\frac{1}{2}}(z) \quad (11c)$$

$$H_x(r, t) = \sum_{i,j,k} \varphi_x H_{i+\frac{1}{2},j,k}(t) \varphi_i(x) \varphi_{j+\frac{1}{2}}(y) \varphi_{k+\frac{1}{2}}(z) \quad (11d)$$

$$H_y(r, t) = \sum_{i,j,k} \varphi_y H_{i,j+\frac{1}{2},k}(t) \varphi_{i+\frac{1}{2}}(x) \varphi_j(y) \varphi_{k+\frac{1}{2}}(z) \quad (11e)$$

$$H_z(r, t) = \sum_{i,j,k} \varphi_z H_{i,j,k+\frac{1}{2}}(t) \varphi_{i+\frac{1}{2}}(x) \varphi_{j+\frac{1}{2}}(y) \varphi_k(z) \quad (11f)$$

把上式代入 Maxwell 方程离散后可得到^[5,6]:

$$\frac{\partial_{\varphi_x} E_{i+\frac{1}{2},j,k}(t)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \sum_{\nu} a(\nu) \left(\frac{H_{i+\frac{1}{2},j+\nu+\frac{1}{2},k}(t)}{\Delta y} \frac{1}{\nu} - \varphi_y H_{i+\frac{1}{2},j,k+\nu+\frac{1}{2}}(t) \frac{1}{\Delta z} \right) \quad (12a)$$

$$\frac{\partial_{\varphi_x} H_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}(t)}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu} a(\nu) \left(\frac{E_{i,j+\frac{1}{2},k+\nu+1}(t)}{\Delta z} \frac{1}{\nu} - \varphi_z E_{i,j+\nu+1,k+\frac{1}{2}}(t) \frac{1}{\Delta y} \right) \quad (12b)$$

2.2.2 时域的离散

经过时间 $t=0$ 至 $t=\tau$, 方程(8)的解可表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} (\tau) = \exp(\tau(\mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B)) \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} (0) \quad (13)$$

由于指数算符 $\exp[\tau(\mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B)]$ 并不能显示计算, 式(13)仅仅是形式解. 在此, 我们可以借助于辛传播子技术^[5], 得到 $\exp[\tau(\mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B)]$ 的 m 级 p 阶近似

$$\exp[\tau(\mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B)] = \prod_{l=1}^m \exp(d_l \tau \mathbf{L}_B) \exp(c_l \tau \mathbf{L}_A) + O(\tau^{p+1}) \quad (14)$$

其中 m, p ($m \geq p$) 为传播子的级数及阶数. 通过选择合适的传播子系数 $\{c_l\}$ 及 $\{d_l\}$, 可以证明以上算法满足保持方程内在结构的条件, 称为辛算法. 至于系数的具体取值, 文中我们参考了文献[7]中优化的 5 级 4 阶传播子系数.

由于 $(\mathbf{L}_\nu) k=0, (\nu = \mathbf{A} \text{ 或 } \mathbf{B}, k=2, 3, \dots)$ 指数算符 $\exp(\tau \mathbf{L}_A)$ 及 $\exp(\tau \mathbf{L}_B)$ 可以显示地表示为:

$$\exp(\tau \mathbf{L}_A) = \mathbf{I}_6 + \tau \mathbf{L}_A \quad (15)$$

$$\exp(\tau \mathbf{L}_B) = \mathbf{I}_6 + \tau \mathbf{L}_B \quad (16)$$

从(14)可以看出, 该辛积分方法具有显式逐级递推的特点. 因而, 同龙格库塔和其它一些隐式算法相比, 也就

大大节约了内存,提高了计算效率.

经过空间时域多分辨率离散、时间 p 阶辛积分离散后,我们就建立了麦克斯韦方程的离散辛框架,即 S-MRTD 算法.

为了减小截断误差,我们对电场分量进行尺度变换,使其与磁场分量的数量级相当.

$$\hat{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E} \quad (17)$$

尺度变化后的电场 x, y, z 分量的迭代公式如下:

$$\begin{aligned} & \hat{E}_x^{n+L/m}(i + \frac{1}{2}, j, k) \\ &= \hat{E}_x^{n+(L-1)/m}(i + \frac{1}{2}, j, k) + \frac{1}{\epsilon_r(i + \frac{1}{2}, j, k)} \times \alpha \\ & \times \sum_{\nu} a(\nu) \left(\varphi_x H_{i+\frac{1}{2}, j+\nu+\frac{1}{2}, k}^{n+L/m}(t) \frac{1}{\Delta y} \right. \\ & \left. - \varphi_y H_{i+\frac{1}{2}, j, k+\nu+\frac{1}{2}}^{n+L/m}(t) \frac{1}{\Delta z} \right) \\ & H_x^{n+L/m}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\ &= H_x^{n+(L-1)/m}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\mu_r(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})} \\ & \times \beta \\ & \times \sum_{\nu} a(\nu) \left(\varphi_y E_{i, j+\frac{1}{2}, k+1+\nu}^{n+(L-1)/m}(t) \frac{1}{\Delta z} - \varphi_x E_{i, j+\nu+1, k+\frac{1}{2}}^{n+(L-1)/m}(t) \frac{1}{\Delta y} \right) \end{aligned}$$

$$\text{式中: } \alpha = d_l \times \Delta_l \times \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad \beta = c_l \times \Delta_l \times \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

式中系数 $a(\nu)$ 中的 ν 理论上从 $-\infty$ 到 $+\infty$, 由于 Daubechies 小波尺度函数的紧支性, 当支撑度为 N 时, 则 ν 从 $-N-1$ 到 N , 所以当 ν 为其余值时系数 $a(\nu) = 0$. 且当 $\nu < 0$ 时, 系数 $a(\nu)$ 由对称关系 $a(-1-\nu) = a(\nu)$ 给出. 表 1 给出了消失矩阶数为 $1 \sim 4$ 阶的 Daubechies 尺度函数对应的系数 $a(\nu)$, 表中只给出了 $\nu > 0$ 的值.

表 1 Daubechies 尺度函数相对应的系数 $a(\nu)$

ν	D_1	D_2	D_3	D_4
0	1	1.229166667	1.2918129281	1.3110340773
1		-0.0937500000	-0.1371343465	-0.1560100710
2		0.0104166667	0.0287617723	0.0419957460
3			-0.0034701413	-0.0086543236
4			0.0000080265	0.0008308695
5				0.0000108999
6				-0.0000000041

3 S-MRTD 方法的稳定性与数值色散性

3.1 稳定性分析

为分析 S-MRTD 法的稳定性及数值色散特性, 可采用文献[8,9]所采用的增长矩阵分析方法. 为了保证算

法的稳定性, 要求对所有的数值传播模, 增长因子 α 满足 $|\alpha| \leq 1$. 将平面波本征模代入 S-MRTD 算法中, 经过复杂的数学推导, 可得 S-MRTD 算法的增长因子 $\alpha = \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$. 因此, 要使算法 S-MRTD 稳定, 则 ζ 必须满足 $|\zeta| \leq 1$, 其中 ζ 为

$$\zeta = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{l=1}^m g_l \left\{ \frac{1}{\mu \epsilon} \tau^2 (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \right\}^l \quad (18)$$

$$g_l = \sum_{1 \leq i_1 \leq j_1 < i_2 \leq j_2 < \dots < i_l \leq j_l \leq m} c_{i_1} d_{j_1} c_{i_2} d_{j_2} \dots c_{i_l} d_{j_l} + \sum_{1 \leq i_1 < j_1 \leq i_2 < j_2 \leq \dots \leq i_l < j_l \leq m} d_{i_1} c_{j_1} d_{i_2} c_{j_2} \dots d_{i_l} c_{j_l} \quad (19)$$

$$\eta_{\xi} = \sum_{\nu} a(\nu) \frac{(e^{-j_0 k_{\xi} \Delta \xi \times (\frac{1}{2} + \nu)} - e^{j_0 k_{\xi} \Delta \xi \times (\frac{1}{2} + \nu)})}{\Delta \xi} \quad (20)$$

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi, k_y = k \sin \theta \sin \phi, k_z = k \cos \theta \quad (21)$$

其中 j_0 为虚数, k 为波数, $\xi = x, y, z$, ϕ 与 θ 分别为波的传播方向与 x 轴及 z 轴正方向的夹角. 为简单起见, 在以下的数值计算过程中, 文中采用均匀网格 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ 离散, 定义稳定性常数

$$CFL = \frac{\tau}{\Delta \sqrt{\epsilon \mu}} \quad (22)$$

CFL 的最大值即 CFL_{\max} 决定了算法稳定性的上界, 通过优化算法, 我们得到了 S-MRTD 算法的 CFL_{\max} 列于表 2 之中, 其中, S-MRTD 方法使用如下传播子系数:

$$\begin{aligned} c_1 = c_5 = 0.17399689, & \quad c_2 = c_4 = -0.12038504 \\ c_3 = 0.89277630, & \quad d_1 = d_4 = 0.62337932 \\ d_2 = d_3 = -0.12337932, & \quad d_5 = 0. \end{aligned}$$

作为参考, FDTD 及基于 D_2 的 MRTD 方法和 S-MRTD 的 CFL_{\max} 也列于表格之中.

表 2 S-MRTD 算法的 CFL_{\max}

算法	S-MRTD(D_2)	FDTD	MRTD(D_2)
CFL_{\max}	0.6502	0.5774	0.4330

3.2 数值色散性分析

用时域多分辨率方法进行空间离散时, 将会在离散网格中引起所模拟波模的色散, 即在差分网格中, 数值波模的传播速度将随频率而改变, 这种色散将导致非物理因素引起的脉冲波形畸变、人为的各向异性及虚假的折射现象. 因此, 数值色散是有限差分法中必须考虑的另一个因素, S-MRTD 算法的数值色散关系为

$$\cos(\omega \tau) = \zeta \quad (23)$$

计算中取离散网格大小 $\Delta = \lambda / PPW$, PPW 为每波长离散网格数. 我们定义相对相速度误差

$$E = 20 \log_{10} \left| \frac{v_p - c}{c} \right| \quad (24)$$

这里, $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{k\lambda}$, 为数值相速度, λ 为波长.

S-MRTD 算法的数值色散关系如下图 1, 图 2 所示,

图中分别给出 FDTD 及 MRTD 的数值色散曲线作为比较.图 1 为 $CFL = 0.4$ 、 $\theta = 60^\circ$ 及 $\phi = 30^\circ$ 情形下, S-MRTD 算法的数值色散与 PPW 的变化关系图;图 2 为 $CFL = 0.4$ 、 $\theta = 30^\circ$ 及 $PPW = 8$ 的情形下, S-MRTD 算法的数值色散与波的传播角度 ϕ 的变化关系图. 由图可以发现,无论在那种情形下, S-MRTD 方法的数值色散都较 FDTD 及 MRTD 更为优越,换句话说,在相同的计算条件下, S-MRTD 方法的计算精度更高.

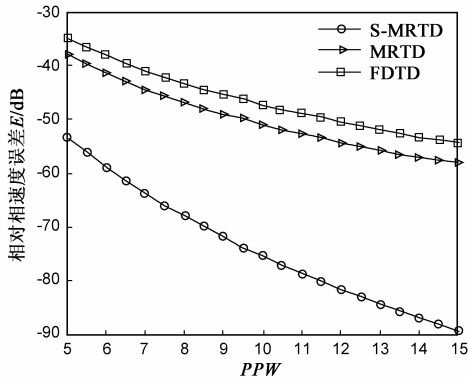


图1 S-MRTD方法的数值色散与PPW的变化关系

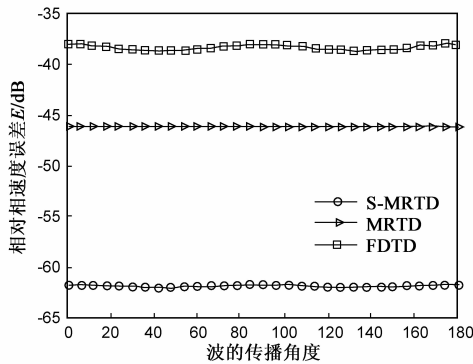


图2 S-MRTD方法的数值色散与波的传播角度φ的变化关系

4 数值算例

分析矩形波导 R120 的谐振频率,算法采用 FDTD (2,2)、MRTD 和 S-MRTD 方法.波导谐振腔尺寸 $a \times b \times c = 19.050\text{mm} \times 9.525\text{mm} \times 14.288\text{mm}$,空间步长 $\Delta = 2.381$,稳定度常数 $CFL = 0.4$,计算总时间步 $n_{\max} = 10000$.调制高斯脉冲源频谱范围 [12GHz, 21GHz],扫频间隔 0.01GHz.对于 MRTD 方法和 S-MRTD 方法,金属边界采用镜像技术处理.谐振频率分布如图 3 所示.谐振频率解析解及数值解计算结果见表 3,所示表中单位均为(GHz),由表可见 S-MRTD 具有最优的计算精度.

从表及图中可以看出,辛 MRTD 算法和解析解吻合地很好,误差很小,而传统的时域有限差分法和 MRTD 方法对应的谐振频率有明显的偏移.

表 3 谐振频率分布及相对误差表

方法	解析解	FDTD (误差%)	MRTD (误差%)	S-MRTD (误差%)
TE ₁₀₁	13.123	13.04 (0.6%)	13.17 (0.3%)	13.13 (0.05%)
TE ₁₁₀	17.607	17.32 (1.6%)	17.73 (0.6%)	17.64 (0.18%)
TE ₀₁₁	18.927	18.64 (1.5%)	19.07 (0.7%)	18.96 (0.17%)
TE ₁₁₁	20.499	20.26 (1.17%)	20.67 (0.8%)	20.53 (0.15%)

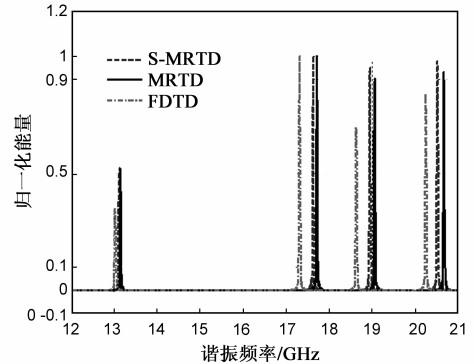


图3 金属谐振器的频谱分布图

5 结论

论文主要引入传播子技术,将 Maxwell 方程表述为 Hamilton 方程并对其进行数值离散求解;结合时域多分辨率方法,建立了求解 Maxwell 方程的 S-MRTD 方法;对 S-MRTD 方法的稳定性及数值色散性进行了系统的探讨,数值计算结果证实了理论的正确性, S-MRTD 方法的引入,为时域电磁计算提供了新的高效的计算方法.

参考文献

- [1] Allen Taflove. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method [M]. Boston, MA: Artech House, 2005.
- [2] M Krumpolz, L P B Katehi. MRTD: New time-domain schemes based on multiresolution analysis[J]. IEEE Trans. Microwave Theory Tech, 1996, 44(4):555 – 571.
- [3] Zhizhang Chen, Jiazong Zhang. An unconditionally stable 3-D ADI-MRTD method free of the CFL stability condition[J]. IEEE Microwave and Wireless Components, 2001, 11(8):349 – 351.
- [4] 冯康,秦孟兆.哈密尔顿系统的辛几何算法[M].杭州:浙江科学技术出版社,2003.358 – 359.
Feng K, Qin M Z. Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems [M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House, 2003.358 – 359. (in Chinese)
- [5] 魏兴昌,梁昌洪.用基于 Coifman 尺度函数的多分辨时域

- 分析计算电磁散射[J]. 电子学报, 2001, 29(12):1668 – 1670.
- WEI Xing-chang, LIANG Chang-hong. Using the MRTD Based on Coifman Scaling Functions to Solve the Problem of Scattering[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(12):1668 – 1670. (in Chinese)
- [6] Traian Dogaru, Lawrence Carin. Scattering analysis by the multiresolution time-domain method using compactly supported wavelet systems[J]. IEEE Trans. Microwave Theory Tech, 2002, 50(7):1752 – 1760.
- [7] Z X Huang, W Sha, X L Wu, M S Chen. Optimal symplectic integrators for numerical solution of time-domain Maxwell's equations[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2007, 49(3):545 – 547.
- [8] 黄志祥, 吴先良. 辛算法的稳定性及数值色散性分析[J]. 电子学报, 2006, 34(3):535 – 538.
- HUANG Zhi-xiang, WU Xian-liang. The Stability and Numerical Dispersion of Symplectic Scheme[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(3):535 – 538. (in Chinese)
- [9] T Hirono, W W Lui, K Yokoyama, S Seki. Stability and numerical dispersion of symplectic fourth-order time-domain schemes for optical field simulation[J]. Journal of Lightwave Technology, 1998, 16(10):1915 – 1920.
- [10] 李康, 孔凡敏, 等. MRTD 和高阶 FDTD 算法的数值色散特性的分析[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(9):2089 – 2095.
- LI Kang, KONG Fan-min, et al. Analysis of numerical dispersion properties of MRTD and higher-order FDTD schemes[J]. Journal of System Simulation, 2005, 17(9):2089 – 2095. (in Chinese)

作者简介



卫敏 男, 1973 年生于安徽合肥, 安徽大学电气工程与自动化学院讲师, 博士. 研究兴趣为电磁散射与电磁计算研究.

E-mail: weimin_51@163.com



吴先良 男, 1955 年生于安徽亳州, 安徽大学电子科学与技术学院教授, 博士生导师. 主要从事电磁散射, 目标成像等方面的研究, 发表论文 70 余篇, 专著两部.

E-mail: xlwu@mars.ahu.edu.cn